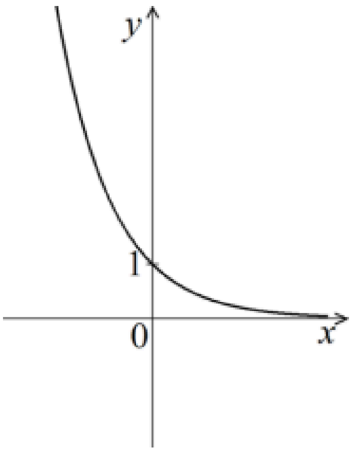
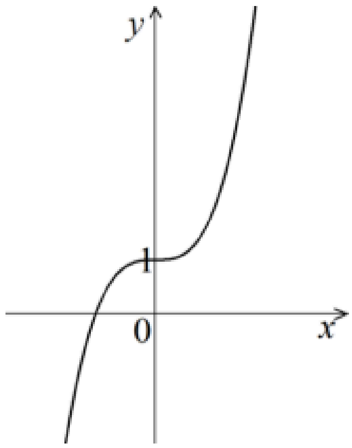
# 1 dalis

**B→01.** Kuriame paveiksle pavaizduotas funkcijos $y = 3^x$ grafiko eskizas?

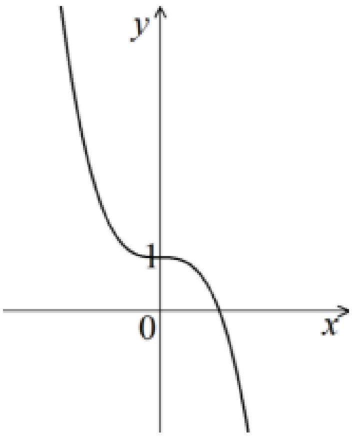
**A**



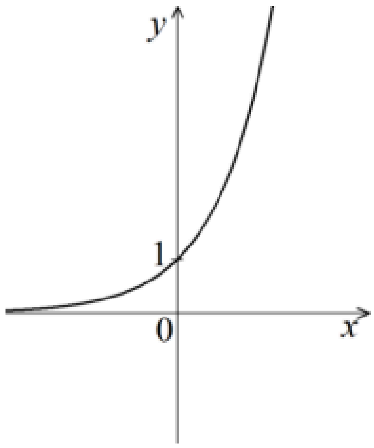

**B**




**C**




**D**




**Atsakymas:** $D$.

**B➔02.** Mokyklos mokiniai ruošia renginį. Buvo apklausti visi vienos klasės mokiniai, kiek valandų per savaitę kiekvienas iš jų skyrė renginiui ruošti. Lentelėje pateikti šios apklausos rezultatai.

| Laikas, kurį mokinys skyrė renginiui ruošti (val.) | 8 | 10 | 16 | 18 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|
| Mokinių skaičius | 10 | 9 | 6 | 4 | 1 |

Apskaičiuokite, kiek vidutiniškai valandų per savaitę šios klasės mokinys skyrė renginiui ruošti.

**A** 16 val. **B** 12 val. **C** 10 val. **D** 8 val.

**Sprendimas.**

$$\frac{10\cdot 8+9\cdot 10+6\cdot 16+4\cdot 18+1\cdot 22}{10+9+6+4+1}=12.$$

**Atsakymas:** $B$.

**B➔03.** Kolegijos virtualiosios bibliotekos skaitytojo paskyros slaptažodis sudaromas iš keturių simbolių. Pirmasis slaptažodžio simbolis turi būti vienas iš penkių ženklų: &, *, #, $, %, o kiti trys slaptažodžio simboliai turi būti trys skirtingi skaitmenys[1] (pvz., *012, %931 ir pan.). Kiek iš viso skirtingų slaptažodžių galima taip sudaryti?

**A** 5000 **B** 3645 **C** 3600 **D** 2520

**Sprendimas.**

$5\cdot 10\cdot 9\cdot 8=3600.$

**Atsakymas:** $C$.

**B➔04.** Augustė nutarė lankyti trijų mėnesių vairavimo kursus. Pirmą mėnesį už šiuos kursus reikia mokėti 400,00 Eur, o kiekvieną kitą mėnesį 10 % mažiau negu paskutinį prieš tai buvusį mėnesį. Apskaičiuokite, kiek Augustei iš viso kainuos šie trijų mėnesių vairavimo kursai.

**A** 1180,00 Eur **B** 1156,00 Eur **C** 1084,00 Eur **D** 1080,00 Eur

**Sprendimas.**

$400+400\cdot 0,9+400\cdot 0,9^2=1084.$

**Atsakymas:** $C$.

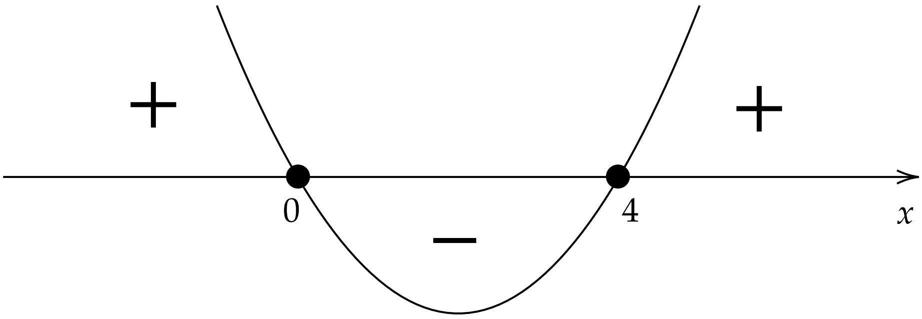
**B➔05.** Nustatykite reiškinio $\sqrt{x(x-4)}$ apibrėžimo sritį[2].

**A** $x\in(-\infty;\,0)\cup(4;\,+\infty)$
**B** $x\in(-\infty;\,0]\cup[4;\,+\infty)$
**C** $x\in(4;\,+\infty)$
**D** $x\in[4;\,+\infty)$

**Sprendimas.**

Išspręsime nelygybę:

$$x(x-4) \geq 0,$$
$$x(x-4) = 0$$
$$x = 0 \text{ arba } x = 4$$



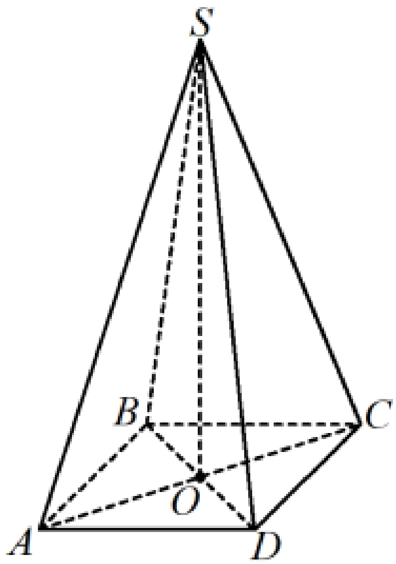

$x \in (-\infty;\ 0] \cup [4;\ +\infty)$.

**Atsakymas:** $B$.

**B➔06.** Paveiksle pavaizduota taisyklingoji keturkampė piramidė[3] *SABCD*. Atkarpa *SO* yra piramidės aukštinė[4]. Piramidės briauna *SA* su pagrindo *ABCD* plokštuma sudaro:

**A** kampą *SAD*
**B** kampą *ASO*
**C** kampą *SAO*
**D** kampą *AOS*

*Juodraštis*




**Sprendimas.**
Kadangi $SO \perp ABD$, tai $AO\ - AS$ projekcija šioje plokštumoje. Vadinasi, $\angle SAO$.

**Atsakymas:** $C$.

**07.** Paveiksle pavaizduotas vienos iš pateiktų funkcijų grafiko eskizas. Kurios?

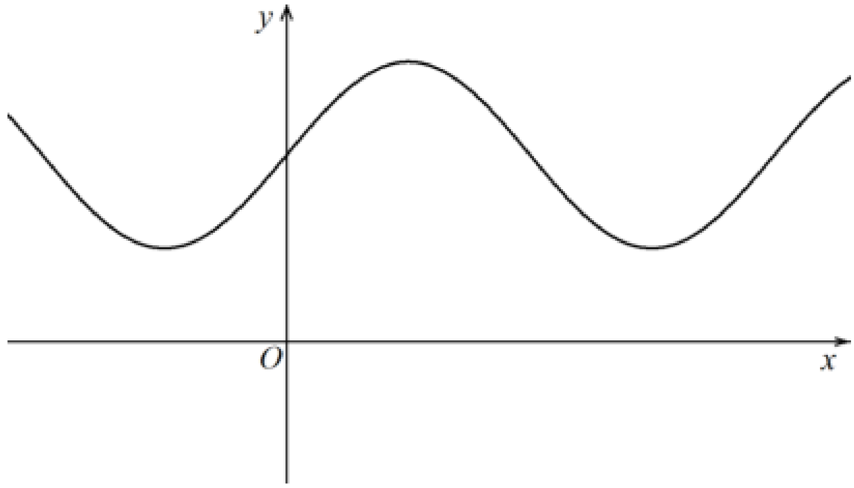
**A** $y=2+\sin x$

**B** $y=\sin(x+2)$

**C** $y=\sin(2x)$

**D** $y=2\sin x$

*Juodraštis*




**Sprendimas.**

Vienintelės funkcijos $y=2+\sin x$ grafikas nekerta $Ox$ ašies.

**Atsakymas:** $A$.

**08.** Paveiksle pavaizduota lygiašonė trapecija[5] $ABCD$. Yra žinoma, kad $AB = CD$, o $AD : BC = 3 : 1$.

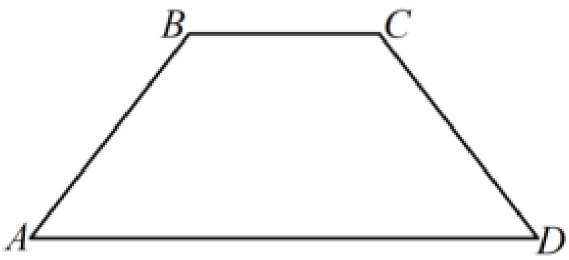
Kuris teiginys apie vektorius yra teisingas?

**A** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

**B** $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{DC}$

**C** $\overrightarrow{BC}=-3\overrightarrow{AD}$

**D** $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{BC}$




**Sprendimas.**

$\overrightarrow{AD}\upuparrows\overrightarrow{BC}$ ir $AD=3BC$, todėl $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{BC}$.

**Atsakymas:** $D$.

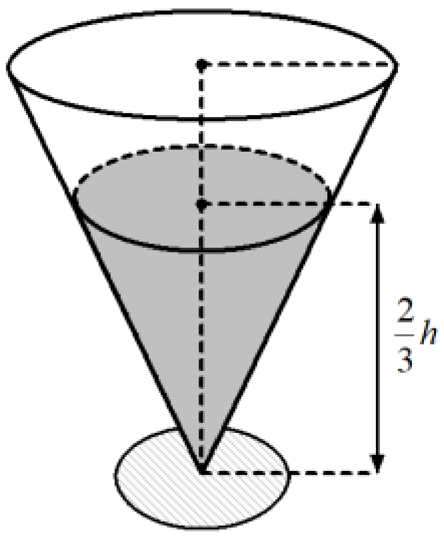
**09.** Ant stalo stovi kūgio[6] formos vaza. Šio kūgio aukštinė, kurios ilgis $h$, statmena stalo horizontaliam paviršiui. Į vazą įpilta tiek vandens, kad jo paviršius yra $\frac{2}{3}h$ aukštyje nuo kūgio viršūnės. Nustatykite, kiek mililitrų vandens yra vazoje, jeigu jos talpa[7] lygi 1 350 ml.

**A** 400 ml

**B** 600 ml

**C** 700 ml

**D** 900 ml



**Sprendimas.**

Mažesnio kūgio tūris sudaro $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$ didesniojo. Vadinasi, vazoje yra $1350 \cdot \frac{8}{27} = 400$ ml vandens.

**Atsakymas:** $A$.

**10.** Aritmetinės progresijos $a_1$, $a_2$, $a_3$, ... skirtumas $d$ yra pirminis skaičius[8], didesnis už 2. Pasirenkami du šios aritmetinės progresijos nariai[9] $a_k$ ir $a_m$. Yra žinoma, kad $a_m - a_k = 28$. Apskaičiuokite $m-k$.

**A** $m-k=2$

**B** $m-k=4$

**C** $m-k=7$

**D** $m-k=14$

**Sprendimas.**

$a_k = a_1 + d(k-1)$,

$a_m = a_1 + d(m-1)$.

Nagrinėkime šių skaičių skirtumą:

$$a_m - a_k = a_1 + d(m-1) - a_1 - d(k-1) = d(m-k).$$

Vadinasi, teisinga lygybė

$$d(m-k) = 28.$$

Kadangi $d$ – pirminis, $d > 2$, tai $d = 7$. Vadinasi, $m-k = 4$.

**Atsakymas:** $B$.

# 2 dalis

*Šioje dalyje reikėjo nurodyti TIK atsakymą, tačiau Jūsų patogumui pateikiami ir uždavinių sprendimai/paaiškinimai.*

**B➔11.** Duotos dvi skaičių aibės[10]: $A = \{1; 5; 8; 9; 14; 19; 20\}$ ir $B = \{1; 5; 7; 9; 12; 20\}$. Apskaičiuokite, kiek elementų priklauso aibių $A$ ir $B$ sankirtai $(A \cap B)$.

**Sprendimas.**
Aibių $A$ ir $B$ sankirtą sudarys elementai priklausantys arba $A$, arba $B$:

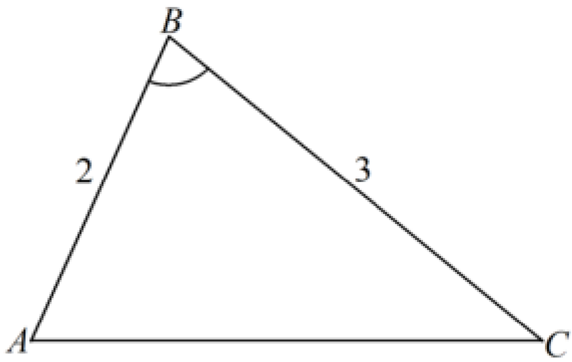
$$A \cap B = \{1,\ 5,\ 9,\ 20\}.$$

Šią aibę sudaro $4$ elementai.

**Atsakymas:** $4$.

**B➔12.** Paveiksle pavaizduotas trikampis $ABC$. Yra žinoma, kad $AB = 2$, $BC = 3$, $\cos\angle ABC = \frac{1}{6}$. Apskaičiuokite trikampio $ABC$ kraštinės $AC$ ilgį.

*Juodraštis*




**Sprendimas.**
Pagal kosinusų teoremą:

$$AC = \sqrt{2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{6}} = \sqrt{11}.$$

**Atsakymas:** $\sqrt{11}$.

**B➔13.** Geometrinės progresijos $n$-tojo nario[11] formulė yra $b_n = \frac{1}{2} \cdot 5^{n-1}$; čia $n \in N$.

**13.1.** Apskaičiuokite $b_3$.

**Sprendimas.**

$$b_3 = \frac{1}{2} \cdot 5^{3-1} = \frac{1}{2} \cdot 25 = 12,5.$$

**Atsakymas:** $12,5$.

**13.2.** Apskaičiuokite šios geometrinės progresijos pirmųjų šešių narių sumą.

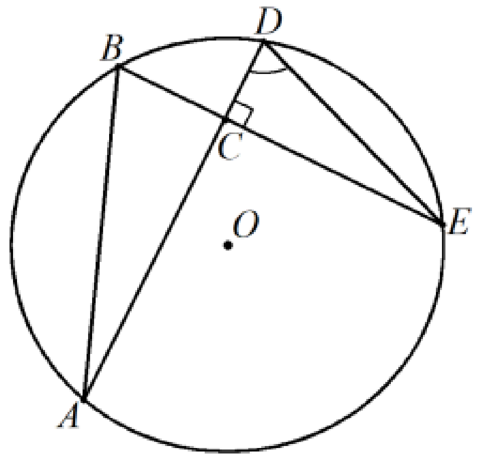
**Sprendimas.**

$$b_1 = \frac{1}{2}, q = 5.$$

$$S_6 = \frac{b_1\left(1-q^6\right)}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}\left(1-5^6\right)}{1-5} = 1953.$$

**Atsakymas:** 1953.

**14.** Paveiksle pavaizduoto apskritimo, kurio centras yra taškas $O$, stygos $AD$ ir $EB$ susikerta taške $C$. Yra žinoma, kad šios stygos statmenos ir $\angle ADE = 60°$.




**B➔14.1.** Apskaičiuokite kampo $BAD$ didumą.

*Juodraštis*

**Sprendimas.**

$\angle DEC = 180° - \angle DCE - \angle CDE = 180° - 90° - 60° = 30°$,

$\angle BAD = \angle DEC = 30°$ (įbrėžtiniai kampai remiasi į tą patį lanką).

**Atsakymas:** $30°$.

**14.2.** Sujungus taškus $A$ ir $E$, gaunamas trikampis $ADE$. Apskaičiuokite trikampio $ADE$ kraštinės $AE$ ilgį, jeigu yra žinoma, kad apskritimo spindulio[12] ilgis lygus $\sqrt{6}$.

**Sprendimas.**

Pagal sinusų teoremos išvadą:

$\frac{AE}{\sin \angle ADE} = 2R$; čia $R$ – apie $\Delta ADE$ apibrėžto apskritimo spindulio ilgis.

$$\frac{AE}{\sin 60°} = 2 \cdot \sqrt{6}$$

$$\frac{AE}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{6},$$

$$AE = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

**Atsakymas:** $3\sqrt{2}$.

**15.** Dėžėje yra vienodo dydžio rutulių: vieni iš jų yra raudoni, o kiti – juodi. Iš dėžės atsitiktinai traukiant vieną rutulį, tikimybė[13], kad jis bus raudonas, yra lygi $\frac{3}{5}$.

**B➔15.1.** Nustatykite, kiek dėžėje yra juodų rutulių, jeigu žinoma, kad joje iš viso yra 35 rutuliai.

**Sprendimas.**

Tikimybė, jog iš dėžės ištrauktas rutulys yra juodas lygi $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$.

Tarkime, jog dėžeje yra $n$ juodų rutulių. Tada teisinga lygybė:

$$\frac{n}{35}=\frac{2}{5},$$

$$n=14.$$

**Atsakymas:** $14$.

**15.2.** Iš dėžės atsitiktinai traukiamas vienas rutulys ir vieną kartą metama moneta. Įvykis $A$ – „iš dėžės ištrauktas raudonas rutulys, o moneta atvirto herbu“. Apskaičiuokite įvykio $A$ tikimybę.

**Sprendimas.**

Tikimybė, kad moneta atvirto herbu lygi $\frac{1}{2}$. Kadangi įvykiai nepriklausomi, tai $P(A)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$.

**Atsakymas:** $\frac{3}{10}$.

**16.** Duoti vektoriai $\vec{a}=(4;3)$ ir $\vec{b}=(5;-12)$. Tarkime, kad $\alpha$ yra kampo tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ didumas. Apskaičiuokite $\cos\alpha$.

**Sprendimas.**

$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\cdot5+3\cdot(-12)=-16,$

$|\vec{a}|=\sqrt{4^2+3^2}=5,$

$|\vec{b}|=\sqrt{5^2+12^2}=13.$

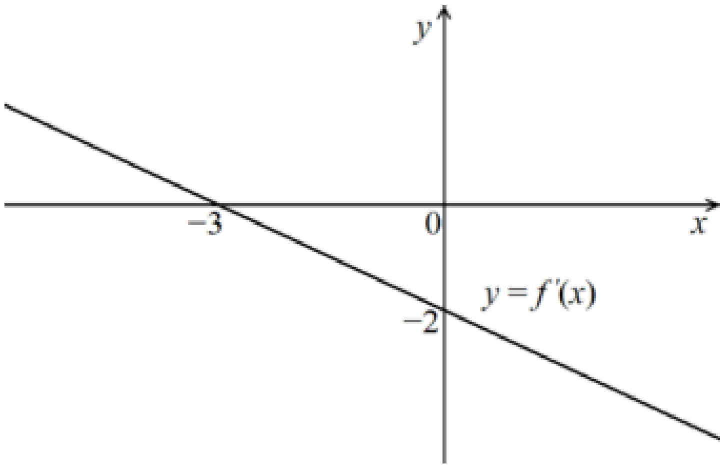
Vadinasi,

$5\cdot13\cdot\cos\alpha=-16\,|:65,$

$\cos\alpha=-\frac{16}{65}.$

**Atsakymas:** $-\frac{16}{65}$.

**17.** Funkcija $y = f(x)$ ir jos išvestinė $y = f'(x)$ yra apibrėžtos, kai $x \in \boldsymbol{R}$. Paveiksle pavaizduotas funkcijos $y = f(x)$ **išvestinės**[14] grafikas yra tiesė, kertanti $Ox$ ir $Oy$ ašis taškuose $(-3; 0)$ ir $(0; -2)$.




**17.1.** Nustatykite visas $x$ reikšmes[15], su kuriomis funkcijos $y = f(x)$ reikšmės mažėja.

**Sprendimas.**
Tereikia nustatyti, su kuriomis $x$ reikšmėmis $f'(x) < 0$. Taip yra, kai $x \in (-3;\ +\infty)$.

**Atsakymas:** $(-3;\ +\infty)$.

**17.2.** Nubrėžta funkcijos $y = f(x)$ grafiko liestinė[16], šį grafiką liečianti taške, kurio abscisė lygi 0. Yra žinoma, kad ši liestinė kerta $Ox$ ašį taške $(5; 0)$. Užrašykite šios liestinės lygtį.

**Sprendimas.**
Liestinės lygtys: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$; čia $x_0$ – lietimosi taško abscisė. Šiuo atveju $x_0 = 0$. Vadinasi, $f'(0) = -2$.
Tada $y = -2x + f(x_0)$.
Kadangi $(5;\ 0)$ priklauso tiesei, tai
$0 = -2 \cdot 5 + f(x_0)$
$f(x_0) = 10$.
Vadinasi, $y = -2x + 10$.

**Atsakymas:** $y = -2x + 10$.

**18.** Yra žinoma, kad $\cos\frac{\pi}{18} = k$. Skaičių $\sin\frac{\pi}{36}$ išreikškite per $k$.

**Sprendimas.**
$$k = \cos\left(\frac{\pi}{18}\right) = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{36}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{36}\right).$$
Iš čia,
$$\sin^2\left(\frac{\pi}{36}\right) = \frac{1-k}{2}$$
Kadangi $\sin\frac{\pi}{36} > 0$, tai $\sin\left(\frac{\pi}{36}\right) = \sqrt{\frac{1-k}{2}}$.

**Atsakymas:** $\sqrt{\dfrac{1-k}{2}}$.

# 3 dalis

*Šioje dalyje reikėjo pateikti ir uždavinio sprendimą.*

**B➔19.** Išspręskite lygtis:

**19.1.** $4^{2-3x} = 64;$

*(2 taškai)*

**Sprendimas.**

$$\begin{aligned} 4^{2-3x} &= 64, \\ 4^{2-3x} &= 4^3, \\ 2-3x &= 3, \\ -3x &= 1 \mid :(-3), \\ x &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

**Atsakymas:** $-\frac{1}{3}$.

**19.2.** $\frac{2x-x^2}{x-2} = 0.$

*(2 taškai)*

**Sprendimas.**

$2x - x^2 = 0,$

$x(2-x) = 0,$

$x = 0$ (*patikrinus tinka*) *arba* $x = 2$ (*patikrinus netinka*).

**Atsakymas:** 0.

**20.** Ignas ketina įsirengti vandens gręžinį. Gręžinio kaina priklauso nuo gręžinio gylio (metrais). Įmonė, teikianti vandens gręžinių įrengimo paslaugas, atsiuntė Ignui tokį pasiūlymą: gręžinio 1-ojo metro kaina yra 11,00 eurų, o kiekvieno kito metro kaina 1,25 euro didesnė nei paskutinio prieš tai buvusio metro.

**B➔20.1.** Apskaičiuokite vandens gręžinio 5-ojo metro kainą.

*(1 taškas)*

**Sprendimas.**

$n-$ tojo metrų kainą galima apskaičiuoti pagal formulę $a_n = 11 + 1,25 \cdot (n-1)$.

$a_5 = 11 + 1,25 \cdot 4 = 16.$

**Atsakymas:** 16.

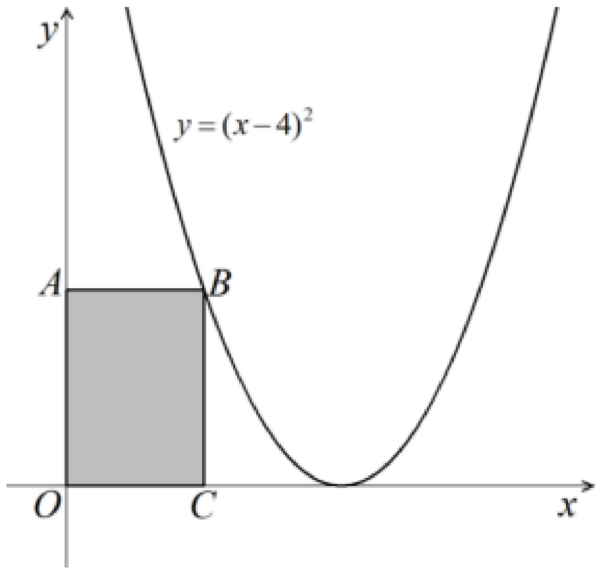
**20.2.** Įmonė nustatė, kad Igno vandens gręžinio gylis bus ne mažesnis kaip 100 metrų. Todėl ji pasiūlė tokią nuolaidą: nuo 1-ojo iki 81-ojo metro kaina didėja, kaip nurodyta anksčiau, o nuo 82-ojo metro kiekvieno kito metro kaina nesikeičia ir yra lygi 81-ojo metro kainai. Apskaičiuokite, kiek Ignui kainuotų įsirengti vandens gręžinį, jei gręžinio gylis būtų 100 metrų.

*(4 taškai)*

**Sprendimas.**
Kadangi $(a_n)$ – aritmetinė progresiją, kurios skirtumas $d = 1,25$, apskaičiuosime pirmųjų 81 metrų kainą:
$$S_{81} = \frac{2a_1 + 80d}{2} \cdot 81 = \frac{2 \cdot 11 + 80 \cdot 1,25}{2} \cdot 81 = 4941.$$
Apskaičiuosime likusiųjų metrų vieno metro kaina: $a_{81} = 11 + 1,25 \cdot 80 = 111.$
Belieka apskaičiuoti:
$4941 + 19 \cdot 111 = 7050.$

**Atsakymas:** 7050.

**21.** Paveiksle pavaizduoti funkcijos $f(x) = (x-4)^2$ grafikas (parabolė) ir stačiakampis [17] $OABC$. Stačiakampio viršūnė $A$ priklauso $Oy$ ašiai, viršūnė $B$ – duotosios funkcijos grafikui, viršūnė $C$ – $Ox$ ašiai, o viršūnė $O$ yra koordinačių pradžios taškas.




**B➔21.1.** Stačiakampio kraštinės $OC$ ilgį pažymėkime $a$; čia $a \in (0; 4)$. Parodykite, kad stačiakampio $OABC$ plotą[18] galima apskaičiuoti pagal formulę $S(a) = a^3 - 8a^2 + 16a$.

*(2 taškai)*

**Sprendimas.**
$BC = f(a) = (a-4)^2,$
$S(a) = OC \cdot BC = a \cdot (a-4)^2 = a \cdot \left(a^2 - 8a + 16\right) = a^3 - 8a^2 + 16a.$

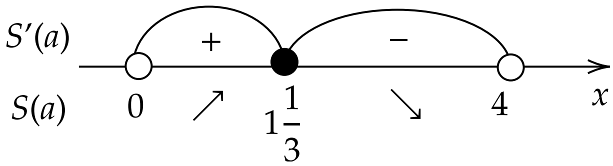
**Parodyta.**

**B➔21.2.** Nustatykite, su kuria $a$ reikšme stačiakampio $OABC$ plotas $S(a) = a^3 - 8a^2 + 16a$ įgyja didžiausią reikšmę, kai $a \in (0; 4)$.

*(3 taškai)*

**Sprendimas.**
$S'(a) = 3a^2 - 16a + 16.$
Apskaičiuosime funkcijos kritinius taškus:

$$3a^2 - 16a + 16 = 0,$$
$$D = (-16)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 16 = 64,$$
$$a_1 = \frac{16+8}{2 \cdot 3} = 4 \; (netinka, \; 4 \notin (0;\; 4))$$
$$a_2 = \frac{16-8}{2 \cdot 3} = 1\frac{1}{3}.$$



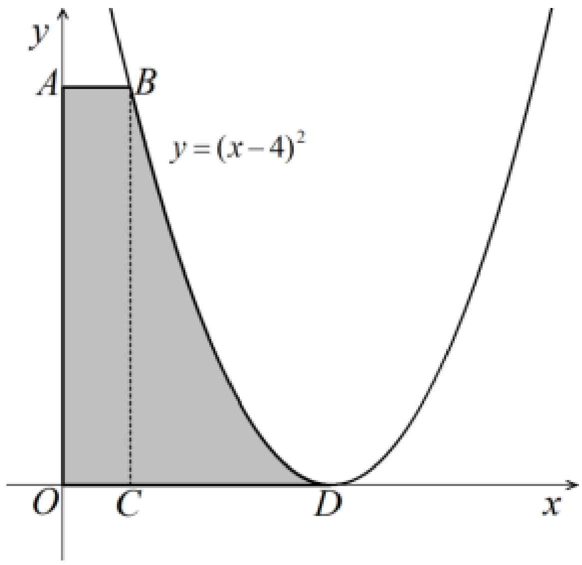

Vadinasi, $a = 1\frac{1}{3}$ vienintelis tolydžios duotame intervale funkcijos ekstremumo, maksimumo taškas, todėl jame funkcija įgis pačią mažiausią reikšmę.

**Atsakymas:** $1\frac{1}{3}$.

**21.3.** Taškas $D$ yra parabolės $y = (x-4)^2$ viršūnė. Apskaičiuokite paveiksle pavaizduotos pilkai nuspalvintos figūros $OABD$ plotą, jeigu yra žinoma, kad $OC = 1$.

*(4 taškai)*

*Juodraštis*




**Sprendimas.**

$S(1) = 1^3 - 8 \cdot 1^2 + 16 = 9,$

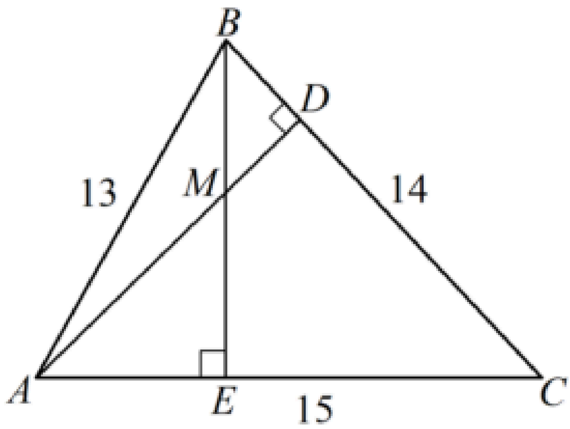
Parabolė liečia $Ox$ ašį taške, kurio $x = 4$, todėl

$$S_{BCD} = \int_1^4 (x-4)^2 \, dx = \int_1^4 \left(x^2 - 8x + 16\right) \, dx = \left(\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 16x\right)\Bigg|_1^4 =$$
$$= \left(\frac{4^3}{3} - 4 \cdot 4^2 + 16 \cdot 4\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 4 \cdot 1^2 + 16 \cdot 1\right) = 9.$$

Vadinasi, figūros plotas $9 + 9 = 18$.

**Atsakymas:** $18$.

**22.** Paveiksle pavaizduoto trikampio $ABC$ aukštinės $AD$ ir $BE$ susikerta taške $M$. Trikampio kraštinių ilgiai yra $AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$.




**B➔22.1.** Įrodykite, kad trikampiai $AME$ ir $BMD$ yra panašieji[19].

*(2 taškai)*

**Sprendimas.**
$\angle MDB = \angle MEA$ (atkarpos statmenos kraštinėms),
$\angle AME = \angle BMD$ (kryžminiai),
todėl duotieji trikampiai panašieji pagal du kampus.

**Įrodyta.**

**22.2.** Parodykite, kad trikampio $ABC$ plotas lygus 84.

*(1 taškas)*

**Sprendimas.**

$$p = \frac{13+14+15}{2} = 21,$$

Remsimės Herono formule:

$$S = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84.$$

**Įrodyta.**

**22.3.** Nustatykite trikampių $AME$ ir $BMD$ panašumo koeficientą.

*(3 taškai)*

**Sprendimas.**

$$S = \frac{BE \cdot AC}{2} = \frac{BE \cdot 15}{2} = 84 \implies BE = 11,2.$$

$$S = \frac{AD \cdot BC}{2} = \frac{AD \cdot 14}{2} = 84 \implies AD = 12.$$

Pagal Pitagoro teoremą:

$$BD = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5,$$

$$AE = \sqrt{13^2 - (11,2)^2} = 6,6.$$

Vadinasi, panašumo koeficientas $k = \dfrac{6,6}{5} = 1,32$ (arba $k = \dfrac{5}{6,6} = \dfrac{25}{33}$)

**Atsakymas:** $1,32$ (arba $\dfrac{25}{33}$).

**22.4.** Pažymėkime $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, o $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Išreikškite vektorių $\overrightarrow{AD}$ vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$.

*(1 taškas)*

**Sprendimas.**

$\overrightarrow{BD} = \frac{5}{14}\overrightarrow{BC} = \frac{5}{14}\vec{b}$,

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \vec{a} + \frac{5}{14}\vec{b}$.

**Atsakymas:** $\vec{a} + \frac{5}{14}\vec{b}$.

**23.** Metamas nestandartinis šešiasienis žaidimo kauliukas, ant kurio sienelių yra po vieną, dvi, tris, keturias, penkias ir šešias akutes, bet tikimybės kauliukui atvirsti kiekviena sienele yra skirtingos. Atsitiktinis dydis[20] $X$ – „vieną kartą mesto šio kauliuko atvirtusios sienelės akučių skaičius“. Atsitiktinio dydžio $X$ skirstinys[21] pateiktas lentele.

| $m$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{P}(X = m)$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{4}$ | $a$ | $\frac{1}{18}$ |

**23.1.** Nustatykite $a$ reikšmę ir apskaičiuokite atsitiktinio dydžio $X$ matematinę viltį[22].

*(2 taškai)*

**Sprendimas.**

$a = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{12} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} - \frac{1}{18} = \frac{1}{9}$,

$EX = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{12} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{9} + 6 \cdot \frac{1}{18} = 2\frac{8}{9}$.

**Atsakymas:** $a = \frac{1}{9}$, $EX = 2\frac{8}{9}$.

**23.2.** Kauliukas metamas du kartus. Apskaičiuokite tikimybę, kad abu kartus atvirtusių sienelių akučių skaičių suma bus lygi 4.

*(2 taškai)*

**Sprendimas.**

Galimi trys atvejai:

1) pirmu bandymu iškrenta $1$, antru $3$;

2) pirmu bandymu iškrenta $3$, antru $1$;

3) abiem bandymai iškrenta $2$.

Įvykiai nesutaikomieji, todėl įvykių tikimybių suma ir yra tikimybė, kurią reikia apskaičiuoti:

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} = \frac{17}{144}$.

**Atsakymas:** $\frac{17}{144}$.

**24.** Išspręskite nelygybes:

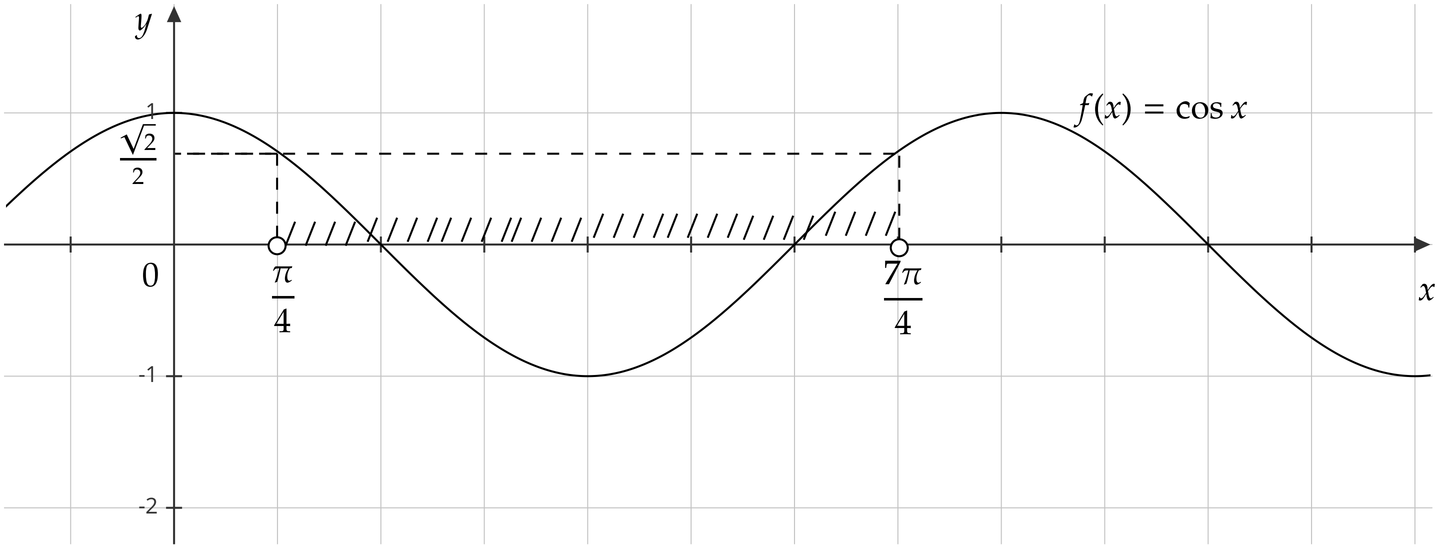
**24.1.** $\cos x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

*(2 taškai)*

**Sprendimas.**
Iš pradžių rasime nelygybės sprendinius intervale $x \in [0;\ 2\pi]$ :

$\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$x = \dfrac{\pi}{4}$, $x = \dfrac{7\pi}{4}$.




Vadinasi, $x \in \left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k;\ \dfrac{7\pi}{4} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

**Atsakymas:** $\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k;\ \dfrac{7\pi}{4} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. .

**24.2.** $\ln(\ln x) \leq 0.$

*(3 taškai)*

**Sprendimas.**
Nustatysime nelygybės apibrėžimo sritį:

$$\begin{cases} \ln x & > 0, \\ x & > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x & > 1 \\ x & > 0 \end{cases} \Longrightarrow x \in (1;\ +\infty).$$

Sprendžiame nelygybę:

$$\begin{aligned} \ln(\ln x) &\leq 0, \\ \ln(\ln x) &\leq \ln 1, \\ \ln x &\leq 1, \\ \ln x &\leq \ln e, \\ x &\leq e. \end{aligned}$$

Vadinasi, $x \in (1;\ e]$.

**Atsakymas:** $(1;\ e]$.

**25.** Duota funkcija $f(x) = 2024^x - \frac{1}{2024^x}$, $x \in \boldsymbol{R}$.

**25.1.** Nustatykite, kokia yra funkcija $y = f(x)$: lyginė[23], nelyginė[24] ar nei lyginė, nei nelyginė. Atsakymą pagrįskite.

*(2 taškai)*

**Sprendimas.**

Funkcija apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje.

$$f(x) = 2024^x - \frac{1}{2024^x}$$

$f(-x) = 2024^{-x} - \frac{1}{2024^{-x}} = \frac{1}{2024^x} - 2024^x = -f(x)$, todėl funkcija nelyginė.

**Atsakymas:** nelyginė.

**25.2.** Įrodykite, kad funkcija $y = f(x)$ neturi kritinių taškų[25].

*(2 taškai)*

**Sprendimas.**

$$f'(x) = 2024^x \ln 2024 + \frac{\ln 2024}{2024^x},$$

Funkcija ir jos išvestinė apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje, $\ln 2024 > 0$, o $2024^x > 0$, todėl $f'(x) > 0$ kiekvienam $x \in \mathbb{R}$. Vadinasi, funkcija $y = f(x)$ kritinių taškų neturi.

**Įrodyta.**